X

Ens.: Basterrechea, Bossoney, Huruguen
Algèbre Linéaire & Géométrie - MAN
1er juillet 2024
Durée : 180 minutes

Examen (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 14 questions et 10 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 40 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons sont à rendre mais ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2, 3 et 4** on donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 2 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 1 (1 point) Quel est le rang de A ?

- ☐ 3
- ☐ 1
- ☐ 0
- ■ 2

Question 2 (2 points) La matrice B est inversible. Quel est le coefficient de B^{-1} se trouvant sur la troisième ligne et la première colonne ?

- ■ $\frac{2}{5}$
- ☐ $-\frac{8}{5}$
- ☐ 0
- ☐ $\frac{7}{5}$

Question 3 (2 points) On donne les matrices colonnes suivantes :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \; C_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La matrice A possède une décomposition colonne-ligne minimale ...

- ☐ ... du type $C_2L_2 + C_3L_3$
- ■ ... du type $C_1L_1 + C_3L_3$
- ☐ ... du type $C_1L_1 + C_2L_2$
- ☐ ... du type $C_1L_1 + C_2L_2 + C_3L_3$

Question 4 (2 points) Les matrices A et AB ...

- ☐ ... sont ligne-équivalentes mais ne sont pas colonne-équivalentes
- ☐ ... sont colonne-équivalentes mais ne sont pas ligne-équivalentes
- ■ ... sont à la fois ligne-équivalentes et colonne-équivalentes
- ☐ ... ne sont ni ligne-équivalentes ni colonne-équivalentes

Pour les **Questions 5, 6 et 7** on donne les deux bases suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = (3,-5,1),(1,2,4),(2,-1,1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (1,2,0),(0,1,0),(0,0,\tfrac{1}{3})$$

ainsi que l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x,y,z) \to (x+2y+3z, 4x-y+5z, 3x+7y+2z)\,.$$

On note aussi $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Question 5 (2 points) Parmi les matrices suivantes, laquelle est la matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$?

■ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Question 6 (2 points) Quel est le coefficient sur la deuxième ligne et la troisième colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?

□ 10 □ 14 ■ 8 □ 20

Question 7 (2 points) Parmi les suites d'opérations élémentaires ci-dessous, laquelle fait passer de la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}$ à la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?

□ $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2\,,\ C_3 \leftarrow \frac{1}{3}C_3$

□ $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2\,,\ C_3 \leftarrow 3C_3$

□ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1\,,\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$

■ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\,,\ L_3 \leftarrow 3L_3$

Pour les **Questions 8 et 9** on donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice A en base canonique vérifie :

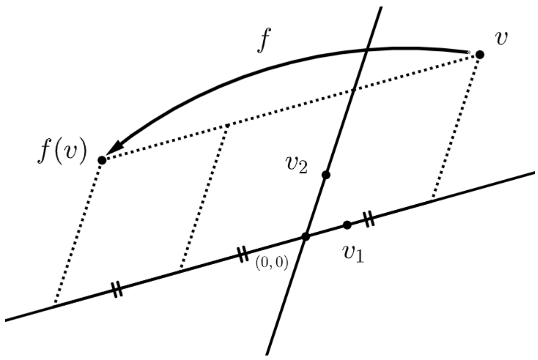
$$A^2 = -2A\,.$$

On suppose de plus que A n'est pas un multiple scalaire de I_2.

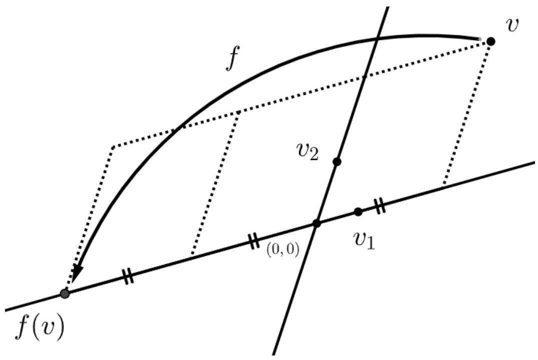
Question 8 (1 point) Quel est le polynôme caractéristique de f ?

☐ $X^2 + X - 2$ ☐ $X^2 + 2X + 4$ ☐ $X^2 - X + 2$ ■ $X^2 + 2X$

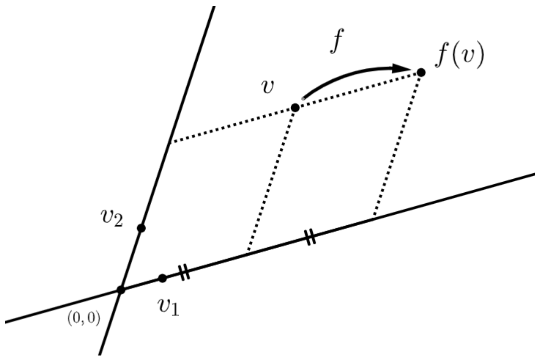
Question 9 (1 point) Une base v_1, v_2 de $\mathbb{R}^2$ met f sous forme réduite. Parmi les schémas suivants, un seul représente f. Lequel ?



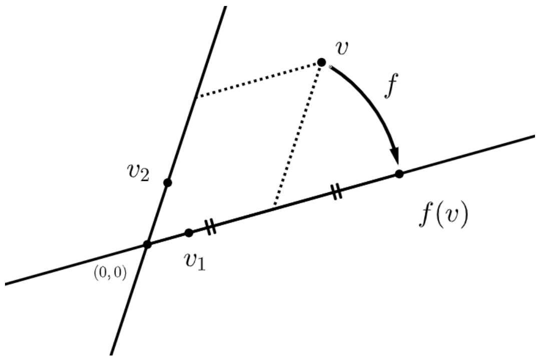
☐



■



☐



☐

Pour les **Questions 10 et 11** on donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ,\ (x,y) \to (5x+4y, -9x-7y)$$

dont on note A la matrice en base canonique.

Question 10 (2 points) Parmi les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$, laquelle met f sous forme réduite?

■ $(2,-3),(1,-1)$ ☐ $(1,1),(-10,15)$ ☐ $(0,1),(2,-3)$ ☐ $(-6,9),(1,0)$

Question 11 (2 points) Quel est le coefficient sur la deuxième ligne et la première colonne de la matrice A^{10} ?

☐ 40 ■ 90 ☐ -40 ☐ -90

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 12: *Cette question est notée sur 8 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 .5 6 .5 7 .5 8

Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}_{\mathbf{can}}$ la base canonique et on donne la base $\mathcal{B}$ suivante :

$$\mathcal{B} = (2,3)\,,\ (5,7).$$

On note aussi V la droite affine contenant $(2,3)$ et dirigée par $(5,7)$.

(a) Quelle est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_{\mathbf{can}}$ à $\mathcal{B}$?

(b) Pour tout $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall v = (x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} [v]_{\mathcal{B}}\,.$$

(d) Calculer une équation de la droite affine V.

(e) Sans aucune justification, donner une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$f^{-1}(\{(2,3)\}) = V\,.$$

Solution

(a) C'est la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) On sait que :

$$[v]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x+5y \\ 3x-2y \end{pmatrix}\,.$$

La décomposition de v correspondante est :

$$v = (x,y) = (-7x+5y)(2,3) + (3x-2y)(5,7)\,.$$

(c) La condition donnée dit que la matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

Par conséquent, la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{B}' = \underbrace{(0,1)}_{5(2,3)-2(5,7)}\,,\ \underbrace{(1,1)}_{-2(2,3)+(5,7)}\,.$$

(d) On trouve :

$$V : \begin{vmatrix} x & 5 \\ y & 7 \end{vmatrix} = 7x - 5y = 7\cdot 2 - 5\cdot 3 = -1\,.$$

(e) On trouve :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x,y) \to (-7x+5y)(2,3)\,.$$

Question 13: *Cette question est notée sur 6 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6

Réponses courtes! Ecrivez seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (5x + 8y - 4z, -2x - 3y + 2z, x + 2y).$$

(a) (1 point) Quelle est la nature géométrique de f (en un mot) ?

projection

(b) (1 point) Quel est le rang de f ?

$\boxed{2}$

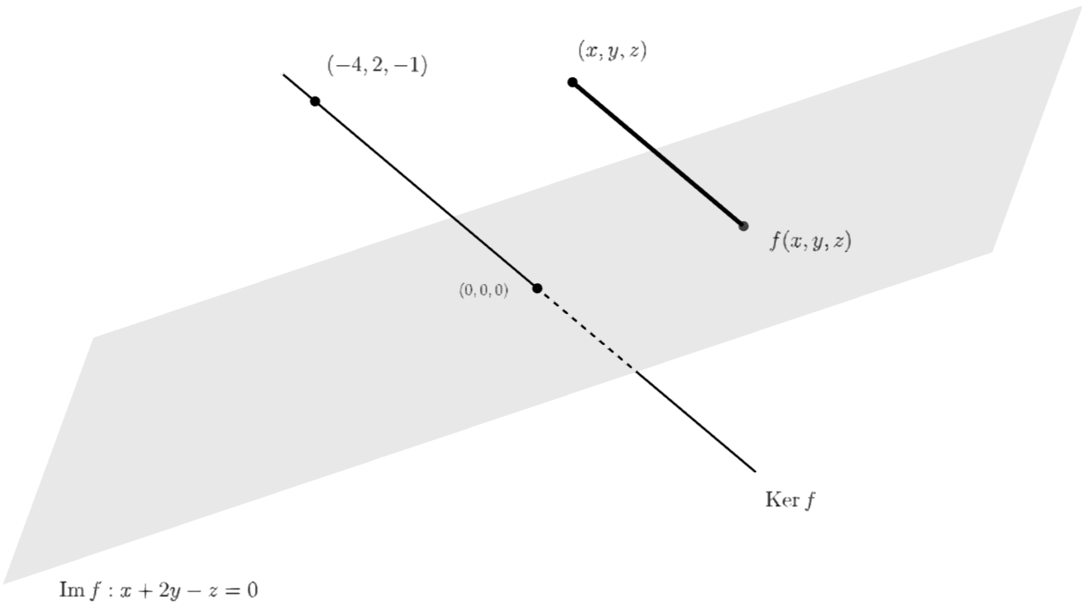
(c) (1 points) Donner l'équation (ou les équations) de l'image de f.

$\boxed{x + 2y - z = 0}$

(d) (1 points) Donner une base du noyau de f.

$\boxed{(-4, 2, -1)}$

(e) (2 points) Placer sur le schéma ci-dessous les éléments caractéristiques de f obtenus aux points (c) et (d), ainsi que $f(x, y, z)$.



Question 14: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha+1 & \alpha^2 & \alpha \\ 3 & \alpha & \alpha \\ 5\alpha+1 & 2\alpha^2 & \alpha^2+\alpha \end{pmatrix}$$

en base canonique, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel.

(a) Calculer le déterminant de A.

(b) On suppose que $\alpha = -1$. Déterminer une décomposition colonne-ligne minimale de A.

(c) Déterminer α sachant que $f^{-1}(\{(1,1,2)\})$ est un plan.

Solution

(a) Il y a évidemment plusieurs façon de raisonner. Par exemple, on peut manipuler le déterminant à l'aide des opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2\alpha+1 & \alpha^2 & \alpha \\ 3 & \alpha & \alpha \\ 5\alpha+1 & 2\alpha^2 & \alpha^2+\alpha \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2\alpha+1 & \alpha^2 & \alpha \\ 3 & \alpha & \alpha \\ \alpha-1 & 0 & \alpha^2-\alpha \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\
&= (\alpha-1)\begin{vmatrix} 2\alpha+1 & \alpha^2 & \alpha \\ 3 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} \quad \text{(extraction de } \alpha-1 \text{ de } L_3) \\
&= (\alpha-1)\begin{vmatrix} 2\alpha+1 & \alpha^2 & -2\alpha^2 \\ 3 & \alpha & -2\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - \alpha C_1) \\
&= (\alpha-1)\begin{vmatrix} \alpha^2 & -2\alpha^2 \\ \alpha & -2\alpha \end{vmatrix} \quad \text{(développement selon } L_3) \\
&= (\alpha-1)(-2\alpha^3+2\alpha^3)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\boxed{\det(A) = 0}$$

On peut aussi remarquer (plus rapide) qu'il a une relation entre les lignes de la matrice A, par exemple :

$$L_1 + \alpha L_2 = L_3.$$

(b) Pour $\alpha = -1$ on a :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La relation suivante est vérifiée entre les lignes de cette matrice :

$$\boxed{L_1 = L_2 + L_3}$$

On peut simplement obtenir cette relation par observation, ou en utilisant la méthode vue au cours. Par exemple, en appliquant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ à A on voit apparaitre une relation de proportionnalité dans la matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

à savoir la troisième ligne est l'opposé de la deuxième. Dans la matrice A initiale, cela signifie que :

$$L_3 = -(L_2 - L_1) \quad \text{ou encore} \quad L_1 = L_2 + L_3 \,.$$

En utilisant cette relation on peut maintenant écrire une décomposition colonne-ligne de A. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} L_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} L_3$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

(c) La condition donnée impose que $\mathrm{Ker}\, f$, qui est le plan vectoriel associé à $f^{-1}(\{(1,1,2)\})$, est de dimension 2. Par le théorème du rang, on a a donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}\, f = 1}$$

En particulier, le déterminant 2×2 (en haut à gauche dans la matrice A) doit être nul :

$$\begin{vmatrix} 2\alpha + 1 & \alpha^2 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = 0 \,.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\alpha \in \{0, 1\}}$$

Pour $\alpha = 0$ on trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,3,1)) \quad \Rightarrow \quad (1,1,2) \notin \mathrm{Im}\, f$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{f^{-1}(\{(1,1,2)\}) = \varnothing}$$

Pour $\alpha = 1$ on trouve :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = (3x + y + z)(1,1,2) \quad \Rightarrow \quad (1,1,2) \in \mathrm{Im}\, f$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{f^{-1}(\{(1,1,2)\}) \text{ est un plan (équation } 3x + y + z = 1)}$$

Il y a donc une unique solution au problème posé, à savoir $\alpha = 1$.